Bemerkung zur vorstehenden Arbeit von Herrn Chevalley.

Von EWALD WARNING in Hamburg.

In der vorstehenden Arbeit*) hat Herr CHEVALLEY bewiesen: Falls ein System von Polynomen (mit Koeffizienten aus einem Galois-Feld), dessen Variablenzahl größer als die Summe der Grade der einzelnen Polynome ist, die gemeinsame Nullstelle O hat, so hat es stets noch eine weitere gemeinsame Nullstelle.

Durch Fortführung des Beweisgedankens von Herrn CHEVALLEY soll im folgenden gezeigt werden, daß zwischen den Nullstellen eines solchen Systems von Polynomen gewisse Relationen bestehen, aus denen insbesondere folgt, daß die Anzahl der Nullstellen durch die Charakteristik des Galois-Feldes teilbar ist. Die Anzahl der Nullstellen ist also entweder $= 0$ oder $\geqq$ der Charakteristik.

Im zweiten Teil dieser Bemerkung werden die Nullstellenrelationen des ersten Teiles näher untersucht; dabei ergibt sich eine genauere Schranke für die Anzahl der Nullstellen.

Der dritte Teil enthält Beispiele von Polynomen ohne Nullstellen.

Herrn ARTIN habe ich für Anregungen zu danken.

I.

k sei ein endlicher kommutativer Körper mit $q = p^m$ Elementen und der Charakteristik p. $f(X) = f(x_1, \cdots, x_n)$ sei ein beliebiges Polynom in den n Unbestimmten $(x_1, \cdots, x_n) = X$ vom Gesamtgrade g mit Koeffizienten aus k. Nach dem Hilfssatz[1]) von Herrn CHEVALLEY gibt es zu $f(X)$ ein eindeutig bestimmtes reduziertes Polynom $f^*(X) \equiv f(X) \bmod. (x_1^q - x_1, \cdots, x_n^q - x_n)$, welches in jeder einzelnen Unbestimmten x_k einen Grad $\leqq q-1$ hat, und dessen Werte $f^*(B) = f(B)$ sind, für jeden Punkt B des n-dimensionalen affinen Raumes R_n über k [d. h. $B = (b_1, \cdots, b_n)$ mit b_k beliebig aus k]. $f^*(X)$ hat einen Gesamtgrad $g^* \leqq g$.

(1) $$F(X) = 1 - f^{q-1}(X)$$

ist dann ein Polynom über k vom Gesamtgrade $(q-1)g$ mit den Werten

$$F(B) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } f(B) = 0, \\ 0, & \text{„ } f(B) \neq 0. \end{cases}$$

*) « Démonstration d'une hypothèse de M. Artin », diese Abh. **11**, S. 73–75.

[1]) «Lemme 1» der vorstehenden Arbeit, S. 74.

Sei nun $A = (a_1, \cdots, a_n)$ ein beliebiger Punkt des R_n, so ist

$$F_A^*(X) = \prod_{k=1}^{n} \{1 - (x_k - a_k)^{q-1}\}$$

das reduzierte Polynom mit den Werten

$$F_A^*(B) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } B = A, \\ 0, & \text{„ } B \neq A. \end{cases}$$

Wenn also $A_1, \cdots, A_r$ r beliebige, verschiedene Punkte des R_n sind [$A_i = (a_{i1}, \cdots, a_{in})$ mit a_{ik} beliebig aus k], so ist

$$(2) \quad F_{A_1, \cdots, A_r}^*(X) = \sum_{i=1}^{r} F_{A_i}^*(X) = (-1)^n \sum_{i=1}^{r} \prod_{k=1}^{n} \{(x_k - a_{ik})^{q-1} - 1\}$$

das reduzierte Polynom mit den Werten

$$F_{A_1, \cdots, A_r}^*(B) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } B = A_i \text{ für ein } i \\ 0, & \text{„ } B \neq A_i \text{ „ alle } i \end{cases} \qquad (i = 1, \cdots, r).$$

In k ist

$$(x - a)^{q-1} = \frac{(x-a)^q}{x-a} = \frac{x^q - a^q}{x-a} = \sum_{\nu=0}^{q-1} x^{q-1-\nu} \cdot a^\nu,$$

also

$$(x_k - a_{ik})^{q-1} - 1 = \sum_{\nu=0}^{q-1} x_k^{q-1-\nu} \cdot a_{ik}^\nu - 1 = \sum_{\nu=0}^{q-1} x_k^{q-1-\nu} \cdot c_{ik}^{(\nu)}$$

mit

$$c_{ik}^{(\nu)} = \begin{cases} a_{ik}^\nu, & \text{wenn } 0 \leqq \nu < q-1, \\ a_{ik}^{q-1} - 1, & \text{„ } \nu = q-1. \end{cases}$$

Somit ist

$$(3) \quad \begin{aligned} &F_{A_1, \cdots, A_r}^*(X) \\ &= (-1)^n \sum_{0 \leqq \nu_k \leqq q-1} x_1^{q-1-\nu_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{q-1-\nu_n} \left\{ \sum_{i=1}^{r} c_{i1}^{(\nu_1)} \cdot \ldots \cdot c_{in}^{(\nu_n)} \right\}. \end{aligned}$$

Wählt man als $A_1, \cdots, A_r$ gerade sämtliche verschiedenen Nullstellen des Polynoms $f(X)$, so ist $F_{A_1, \cdots, A_r}^*(X) = F^*(X)$ das zu $F(X) = 1 - f^{q-1}(X)$ **gehörige** reduzierte Polynom, denn für jeden Punkt B des R_n ist

$$F^*(B) = F(B) = \begin{cases} 1, \text{ wenn } f(B) = 0, \text{ d. h. } B = A_i \text{ für ein } i = 1, \cdots, r, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Aus der Bedingung

$$(4) \qquad \text{Grad } \{F(X)\} = (q-1)g \geqq \text{Grad } \{F^*(X)\}$$

folgt, falls $(q-1)n > (q-1)g$, d. h. $n > g$ ist, daß die Koeffizienten der Glieder höheren als $(q-1)\cdot g$-ten Grades in (3) verschwinden müssen. Also gilt

$$\sum_{i=1}^{r} c_{i1}^{(\nu_1)} \cdot \ldots \cdot c_{in}^{(\nu_n)} = 0 \tag{5}$$

für alle $\nu_1, \cdots, \nu_n$ mit $0 \leqq \nu_k \leqq q-1$ und $\sum_{k=1}^{n} \nu_k < (q-1)(n-g)$. [Wenn $n \leqq g$, so ist (4) wegen Grad $\{F^*(X)\} \leqq (q-1)n$ stets erfüllt; (5) ist dann inhaltslos.] Wenn alle $\nu_k < q-1$ sind, so bedeutet (5) nach Definition der $c_{ik}^{(\nu)}$:

$$\sum_{i=1}^{r} a_{i1}^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot a_{in}^{\nu_n} = 0$$

für $0 \leqq \nu_k < q-1$ und $\sum_{k=1}^{n} \nu_k < (q-1)(n-g)$. Wenn etwa $\nu_1 = q-1$ und $0 \leqq \nu_k < q-1$ für $k = 2, \cdots, n$ mit $\sum_{k=1}^{n} \nu_k < (q-1)(n-g)$, so folgt aus (5)

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{r} (a_{i1}^{q-1} - 1) \cdot a_{i2}^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot a_{in}^{\nu_n} \\ &= \sum_{i=1}^{r} a_{i1}^{q-1} \cdot a_{i2}^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot a_{in}^{\nu_n} - \sum_{i=1}^{r} a_{i1}^{0} \cdot a_{i2}^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot a_{in}^{\nu_n}. \end{aligned}$$

Nach dem Vorhergehenden ist die zweite Summe Null, also ist auch die erste Summe gleich Null. Durch Induktion nach der Anzahl der auftretenden Exponenten $q-1$ folgt also aus (5)

$$\sum_{i=1}^{r} a_{i1}^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot a_{in}^{\nu_n} = 0 \tag{6}$$

für alle ganzzahligen $\nu_1, \cdots, \nu_n$ mit $0 \leqq \nu_k \leqq q-1$ und $\sum_{k=1}^{n} \nu_k < (q-1)(n-g)$. Wegen $a_{ik}^{q} = a_{ik}$ ist dabei die Beschränkung $\nu_k \leqq q-1$ überflüssig. Diese Relationen (6) für die Koordinaten der Nullstellen A_i von $f(X)$ lassen sich zusammenfassen in dem

Satz 1. *$f(X) = f(x_1, \cdots, x_n)$ sei ein beliebiges Polynom in n Unbestimmten über k vom Gesamtgrad $g < n$; $A_1, \cdots, A_r$ seien sämtliche (verschiedenen) Nullstellen von $f(X)$. Dann gilt für jedes Polynom $\varphi(X) = \varphi(x_1, \cdots, x_n)$ über k, dessen reduzierter Gesamtgrad $< (q-1)(n-g)$ ist:*

$$\sum_{i=1}^{r} \varphi(A_i) = 0.^{2})$$

---

[2]) Der Satz gilt natürlich ebenso für die „a-Stellen" von $f(X)$ [a beliebig aus k], denn das sind die Nullstellen des Polynoms $f(X) - a$.

Für $\varphi(X) = 1$ [d. h. in (5) und (6): alle $\nu_k = 0$] folgt insbesondere, daß in k $\sum_{i=1}^{r} 1 = 0$ ist, d. h.

Satz 1a. *Wenn $g < n$ ist, so ist die Anzahl der (verschiedenen) Nullstellen von $f(X)$ durch die Charakteristik p des Körpers k teilbar; also entweder $= 0$ oder $= p, 2p, \cdots$.*[3])

Entsprechendes gilt für die simultanen Lösungen mehrerer Polynomgleichungen: Seien $f_i(X) = f_i(x_1, \cdots, x_n)$ $(i = 1, \cdots, s)$ s Polynome der n Unbestimmten $(x_1, \cdots, x_n) = X$ über dem Körper k; die Gesamtgrade der $f_i(X)$ seien g_i. Bezeichnet man mit $A_1, \cdots, A_r$ die sämtlichen (verschiedenen) *gemeinsamen Nullstellen* aller s Polynome $f_1(X), \cdots, f_s(X)$, und ersetzt man (1) durch

$$(1)' \qquad F(X) = \prod_{i=1}^{s} (1 - f_i^{q-1}(X)),$$

also

$$F(B) = \begin{cases} 1, & \text{wenn alle } f_i(B) = 0, \text{ d. h. } B = A_\nu \text{ für ein } \nu = 1, \cdots, r, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so lassen sich mit $g = \sum_{i=1}^{s} g_i$ Satz und Beweis wörtlich übertragen.

II.

Seien $a_1, \cdots, a_{n-g}$ beliebige Elemente aus k, und bezeichne $N(a_1, \cdots, a_{n-g})$ die *Anzahl* derjenigen A_i, deren Koordinaten an $n-g$ Stellen [etwa an den ersten, bei passender Numerierung der Unbestimmten] die Werte $a_{ik} = a_k$ haben (für $k = 1, \cdots, n-g$). Dann gilt der

Hilfssatz. *$N(a_1, \cdots, a_{n-g})$ ist modulo p von den Werten der a_k unabhängig.*

Zum Beweise genügt es, zu zeigen, daß für beliebiges $c_1 (\neq a_1)$ aus k stets

$$N(a_1, a_2, \cdots, a_{n-g}) \equiv N(c_1, a_2, \cdots, a_{n-g}) \,(\mathrm{mod.}\, p)$$

ist. Setzt man

$$h(x) = x^{q-1} - 1 = \prod_{\substack{\alpha \subset k \\ \alpha \neq 0}} (x - \alpha),$$

so ist

$$(7) \qquad \psi(X) = \frac{h(x_1 - a_1)}{x_1 - c_1} \cdot h(x_2 - a_2) \cdot \cdots \cdot h(x_{n-g} - a_{n-g})$$

---

[3]) Wenn $f(X)$ überhaupt eine Nullstelle hat, so ist die Anzahl der Nullstellen $\geqq p$. Der in der Einleitung erwähnte Satz von Herrn Chevalley («Théorème» der vorstehenden Arbeit, S. 75) ist also [*zunächst* nur für *ein* Polynom $f(X)$] hierin enthalten, weil stets $p \geqq 2$ ist.

ein Polynom vom Gesamtgrade $(q-1)(n-g)-1$, welches wegen $\frac{h(x_1-a_1)}{x_1-c_1} = \prod_{\substack{\alpha \subset k \\ \alpha \neq a_1, c_1}} (x_1-\alpha) = \frac{h(x_1-c_1)}{x_1-a_1}$ folgende Werte hat:

$$\psi(B) = \frac{(-1)^{n-g}}{a_1-c_1} \cdot \begin{cases} 1, & \text{wenn } b_1 = a_1 \text{ und } b_k = a_k \text{ für } k = 2, \cdots, n-g, \\ -1, & \text{„ } b_1 = c_1 \text{ „ } b_k = a_k \text{ „ } k = 2, \cdots, n-g, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daher gilt nach Satz 1 *im Körper k* die *Gleichung*

$$(8) \qquad 0 = \sum_{i=1}^{r} \psi(A_i) = \frac{(-1)^{n-g}}{a_1-c_1} \cdot \{N(a_1, a_2, \cdots, a_{n-g}) - N(c_1, a_2, \cdots, a_{n-g})\}.$$

Die beiden *Anzahlen* sind also *kongruent* mod. p.

Sei $X' = \sigma(X)$ eine beliebige lineare Transformation der Unbestimmten $\left[x_i' = \sigma_{i0} + \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_{i\nu} x_\nu,\ \sigma_{i\nu}\right.$ beliebig aus k für $1 \leqq i \leqq n$ und $\left. 0 \leqq \nu \leqq n\right]$. Dann gilt für die $A_i' = \sigma(A_i)$ und für jedes Polynom $\varphi(X)$ über k, dessen reduzierter Gesamtgrad $< (q-1)(n-g)$ ist, analog zum Satz 1: $\sum_{i=1}^{r} \varphi(A_i') = 0$. Dies folgt direkt aus dem Satz 1 für die Nullstellen A_i von $f(X)$; denn wenn man in Satz 1 statt $\varphi(X)$ das Polynom $\varphi_\sigma(X) = \varphi(\sigma(X))$ verwendet, dessen reduzierter Gesamtgrad sicher $\leqq$ dem reduzierten Gesamtgrad von $\varphi(X)$ ist, so ergibt sich

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \varphi_\sigma(A_i) = \sum_{i=1}^{r} \varphi(\sigma(A_i)).$$

Da man jeden g-dimensionalen linearen Unterraum des R_n durch eine eindeutige lineare Transformation σ des R_n auf den Raum:

$$\begin{cases} x_\nu' = a_\nu \text{ für } \nu = 1, \cdots, n-g & (a_\nu \subset k; \text{ fest}), \\ x_\nu' \text{ beliebig aus } k \text{ für } n-g < \nu \leqq n \end{cases}$$

abbilden kann, so folgt aus dem vorhergehenden Beweis des Hilfssatzes [mit $\psi_\sigma(X) = \psi(\sigma(X))$ statt $\psi(X)$ in (7) und (8)]:

Satz 2. *Für parallele g-dimensionale lineare Unterräume des R_n sind die Anzahlen der darin enthaltenen A_i kongruent mod. p.*

Der Hilfssatz ist gleichwertig mit denjenigen Relationen von Satz 1, in deren $\varphi(X)$ höchstens $n-g$ verschiedene Unbestimmte vorkommen.

Daß der Hilfssatz aus den angegebenen Relationen von Satz 1 folgt, ergibt sich unmittelbar aus dem Beweis, weil in $\psi(X)$ nur $n-g$ verschiedene Unbestimmte vorkommen.

Umgekehrt läßt sich aus den $h(x-a)$ $\left[\text{bzw. } \frac{h(x-a)}{x-c}\right]$ jedes Polynom in x, insbesondere die Potenz x^ν, linear kombinieren, wenn der Grad $\nu \leqq q-1$ [bzw. $\leqq q-2$] ist; denn man kann die Werte einer solchen Linearkombination $L(x)$ an q [bzw. $q-1$] Stellen mit x^ν übereinstimmend vorschreiben, $x^\nu - L(x)$ ist dann ein Polynom in x über k, dessen Grad kleiner als die Anzahl seiner Nullstellen [q bzw. $q-1$] ist, d. h. $x^\nu - L(x)$ ist identisch Null. Aus den Polynomen $\psi(X)$ der Gestalt (7) kann man daher alle Potenzprodukte $x_1^{\nu_1} \cdot x_2^{\nu_2} \cdot \cdots \cdot x_{n-g}^{\nu_{n-g}}$ linear kombinieren, bei denen $0 \leqq \nu_1 \leqq q-2$ und $0 \leqq \nu_k \leqq q-1$ für $k = 2, \cdots, n-g$ ist; also [bei geeigneter Numerierung der Variablen] alle Potenzprodukte von $n-g$ Variablen, deren Grad in jeder einzelnen Variablen $\leqq q-1$ ist bei einem Gesamtgrad $< (q-1)(n-g)$. Aus den Relationen (8) folgen also die Relationen (6) für diese Potenzprodukte und daraus folgt die Behauptung.

Wenn die Anzahl r aller Nullstellen A_i nicht Null ist, so ergibt sich aus Satz 2 eine untere Abschätzung für r:

1. Sei für *einen* g-dimensionalen linearen Raum $L \subset R_n$ die Anzahl der darin enthaltenen A_i nicht kongruent Null mod. p, also $\geqq 1$; dann also auch für alle zu L_g parallelen g-dimensionalen linearen Räume. Durch jeden der q^n Punkte des R_n geht genau ein zu L_g paralleler g-dimensionaler Raum $L_g^{(\nu)}$, und da jeder dieser $L_g^{(\nu)}$ q^g Punkte enthält, so stimmen je q^g dieser q^n Räume überein. Der R_n besteht also aus genau q^{n-g} verschiedenen zu L_g parallelen Räumen $L_g^{(\nu)}$; die Anzahl r aller A_i ist also sicher $\geqq q^{n-g}$.
2. Sei für *jeden* g-dimensionalen linearen Raum des R_n die Anzahl der darin enthaltenen A_i kongruent Null mod. p. Dann gibt es (falls $r \neq 0$ ist) eine ganze Zahl s $(1 \leqq s \leqq g)$, so daß für jeden s-dimensionalen linearen Raum die Anzahl der darin enthaltenen A_i kongruent Null mod. p ist, für einen gewissen $(s-1)$-dimensionalen Raum L_{s-1} aber die entsprechende Anzahl $\not\equiv 0$ (mod. p) ist. Durch jeden der $q^n - q^{s-1}$ außerhalb L_{s-1} liegenden Punkte des R_n gibt es genau einen s-dimensionalen linearen Raum, der L_{s-1} enthält; dieser enthält $q^s - q^{s-1}$ nicht in L_{s-1} liegende Punkte. Daher gibt es genau

$$\frac{q^n - q^{s-1}}{q^s - q^{s-1}} = \frac{q^{n-s+1} - 1}{q-1} = q^{n-s} + \cdots + q + 1$$

verschiedene s-dimensionale lineare Räume $L_s^{(\nu)}$, welche zu je zweien L_{s-1} als Durchschnitt haben. Wenn die Anzahl der A_i in L_{s-1} $\equiv a$ (mod. p) ist, mit $1 \leqq a \leqq p-1$, so gibt es also in jedem $L_s^{(\nu)}$ mindestens $p-a$ Punkte A_i, welche nicht zu L_{s-1} gehören.

Die Gesamtzahl aller A_i ist also $\geqq a+(p-a)\cdot\frac{q^{n-s+1}-1}{q-1}$. In diesem Fall 2 ist also

$$r>\frac{q^{n-s+1}-1}{q-1}\geqq\frac{q^{n-g+1}-1}{q-1}>q^{n-g}.$$

Daher gilt allgemein:

Satz 3. *Wenn das Polynom $f(X)$ (mit $g<n$) überhaupt eine Nullstelle hat, so ist die Anzahl aller (verschiedenen) Nullstellen von $f(X)$ mindestens q^{n-g}.*

Wenn $r\neq 0$ ist, so gilt also stets $r\geqq q$. Satz 3 ist außer für $n=g+1$ und $k=R_{(p)}$ [Primkörper mit p Elementen] eine Verschärfung der aus Satz 1a folgenden Abschätzung $r\geqq p$.

Daß es zu beliebigem g und n mit $n>g$ Polynome [sogar homogene Formen] vom Grade g in n Unbestimmten mit *genau q^{n-g} Nullstellen* gibt, zeigt folgendes Beispiel, welches ich Herrn H. Maass verdanke:

Sei $G(y_1,\cdots,y_g)$ eine Form g-ten Grades in g Unbestimmten, welche nur die triviale Nullstelle, alle $y_i=0$, besitzt; etwa die Normenform des Oberkörpers vom Relativgrad g über k. Setzt man $y_i(X)=\sum_{k=1}^{n}t_{ik}x_k$ $(i=1,\cdots,g)$ mit n neuen Unbestimmten $(x_1,\cdots,x_n)=X$, wobei $T=(t_{ik})$ eine Matrix über k vom Rang g ist, so ist

$$f(X)=G(y_1(X),\cdots,y_g(X))$$

eine Form g-ten Grades in X mit genau q^{n-g} Nullstellen. Denn sei etwa die Determinante der ersten g Spalten von T ungleich Null, so lassen sich zu beliebigen $x_{g+1},\cdots,x_n$ aus k die Werte von $x_1,\cdots,x_g$ eindeutig so bestimmen, daß alle $y_i=0$ sind, d. h. $f(X)=0$.

III.

Daß es in jedem endlichen Körper [außer im Primkörper $R_{(2)}$] zu beliebigem Grad $g>1$ und beliebiger Variablenzahl $n\geqq\frac{g}{q-1}$ *reduzierte Polynome*[4]) *ohne Nullstellen* gibt, zeigt folgendes Beispiel:

Da es über k Oberkörper beliebigen Grades gibt, so gibt es in k insbesondere zu jedem ganzen g mit $1<g\leqq q-1$ [ist nur möglich, wenn $q>2$] ein irreduzibles Polynom $\varphi_g(x)$ einer Unbestimmten x vom Grade g. Also ist $f(X)=f(x_1,\cdots,x_n)=\varphi_g\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)$ ein reduziertes Polynom in n Unbestimmten [n beliebig] vom Grade g, welches keine Nullstelle hat. Durch Produktbildung solcher Polynome $\left[f(X)=\prod_{i=1}^{r}\varphi_{g_i}\left(\sum_{k=1}^{n_i}x_{ik}\right)\right.$ mit $g=\sum_{i=1}^{r}g_i$ und $n=\sum_{i=1}^{r}n_i$, wobei $1<g_i\leqq q-1$ und

[4]) Für reduzierte Polynome gilt nach Definition stets $g\leqq(q-1)n$.

$1 \leqq n_i]$ kann man sich von der Einschränkung $g \leqq q-1$ freimachen und braucht nur zu fordern, daß $g > 1$ und $n \geqq \frac{g}{q-1}$ ist. [Für $q = 3$ muß man bei ungeradem g noch ein reduziertes Polynom in zwei Unbestimmten vom Grad 3 benutzen, welches keine Nullstelle hat; etwa $\varphi(x, y) = x^2y + x^2 + y^2 + 1$.]

Für $g = q - 1$ und beliebiges n seien noch zwei Beispiele explizit angegeben:

1. Wenn die Charakteristik p von k nicht gleich 2 ist, so hat $f(x_1, \cdots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{q-1} + 1$ stets die Werte 1 oder 2, ist also ein reduziertes Polynom ohne Nullstelle.

2. Wenn k nicht Primkörper ist, also $k \supsetneqq R_{(p)}$ [ohne Einschränkung für die Charakteristik p], so ist $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^{q-1} + \alpha$ mit $\alpha \subset k$, aber $\alpha \not\subset R_{(p)}$, ein reduziertes Polynom ohne Nullstelle. Denn die Werte der einzelnen Summanden x_k^{q-1} sind 0 oder 1, liegen also in $R_{(p)}$; die Werte von $f(x_1, \cdots, x_n)$ liegen also sicher nicht in $R_{(p)}$, sind also stets $\neq 0$.

Im ausgeschlossenen Fall des Primkörpers $R_{(2)}$ hat jedes reduzierte nicht-konstante Polynom mindestens eine Nullstelle, denn ein reduziertes Polynom ohne Nullstelle hat dort stets den Wert 1, ist also konstant.

Hamburg, im September 1934.